

С.Л. Василенко

Пифагоровы деревья, тройки и двучленно-аддитивная рекурсия Фибоначчи

Эх, тройка! птица тройка,
кто тебя выдумал? Н.В.Гоголь

В ряде статей [1–4] нами освещались разные отношения между теоремой Пифагора, золотой пропорцией и числами Фибоначчи, которые тесно переплетены своим взаимным проникновением.

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина "золотого сечения", замечательный искусствовед и философ Василий Зубов в свое время давал перевод оригинального текста высказывания И.Кеплера [1]: «Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако, без первой ничего не стоит». – J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596.

Великий ученый возвышенным слогом назвал теорему Пифагора золотой, а пропорциональное (золотое) сечение или деление прямой линии в крайнем и среднем отношении уподобил драгоценному камню.

То есть по Кеплеру, "золотое сечение" следовало бы, скорее, назвать "алмазным".

По иронии судьбы, со временем названия перемешались и поменялись местами.

Так появился термин золотое отношение (сечение) или божественная пропорция в интерпретации Луки Пачолли. – В математике весьма привычная практика.

«Со времен астронома И.Кеплера (XVII век) иногда высказываются различные точки зрения относительно того, что обладает большей фундаментальностью – теорема Пифагора или золотая пропорция» [2]. Надо сказать, бесплодное занятие.

Они «в своем развитии тесно переплетаются одна с другой и геометрическими, и алгебраическими свойствами. Между ними нет ни пропасти, ни принципиальных различий. Они не конкурируют, у них разные предназначения» [5].

Теорема Пифагора лежит в основании математики.

Золотое сечение порождено тривиальной математической пропорцией из трех элементов $a + b = 1$.

Оно несложно для понимания и часто наделяется свойствами гармонии и красоты.

Его основательность не считается общепризнанной. Однако набор уникальных свойств позволяет высказывать разные гипотезы о возможной универсальности.

Так или иначе, существует ряд моделей, объединяющих особенности теоремы Пифагора и золотого сечения. Особенно это хорошо проявляется в прямоугольных треугольниках специального вида.

Общие сведения.

В математической теории графов *дерево* – связный ациклический граф.

Связность означает наличие пути-маршрута между любой парой вершин, ациклическость – отсутствие циклов.

Число ребер в дереве на единицу меньше числа вершин, а между любыми парами вершин имеется один и только один путь (простая цепь).

Дерево Пифагора – разновидность плоского фрактала, построенного голландским учителем математики Albert E. Bosman (1942) на основе геометрических квадратов.

Каждая тройка соприкасающихся квадратов включает прямоугольный треугольник, традиционно используемой для описания теоремы Пифагора в евклидовой геометрии.

Классическое дерево Пифагора начинается с квадрата, на котором строятся два меньших квадрата с линейным коэффициентом подобия $1/\sqrt{2}$ так, что углы квадратов попарно совпадают. Такая процедура рекурсивно применяется к двум меньшим квадратам, до бесконечности (рис. 1).

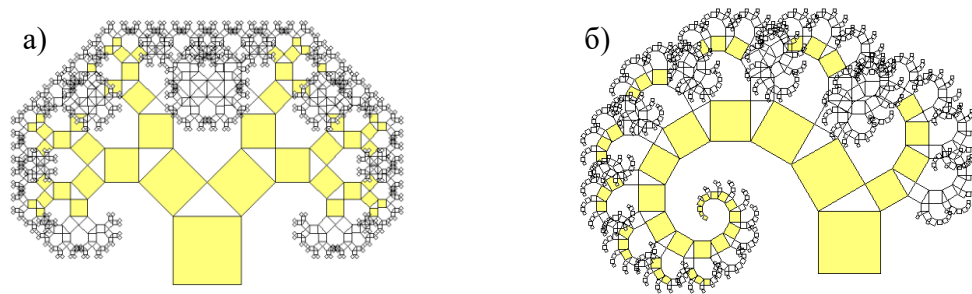


Рис. 1. Деревья Пифагора: а) классическое; б) обдуваемое ветром

Форма кроны дерева напоминают известную фрактальную кривую французского математика П. Леви (1930). Если исходный квадрат имеет размер $d \times d$, то всё дерево Пифагора плотно уместится внутри прямоугольника размером $(6d) \times (4d)$.

В классическом дереве Пифагора (рис. 1-а) острый угол прямоугольного треугольника равен 45 градусам. Использование других углов дает обобщенное дерево, которое часто называется «обдуваемое ветром» (рис. 1-б).

Пифагорова тройка – упорядоченный набор (кортеж) из 3 натуральных чисел (a, b, c) , удовлетворяющих равенству $a^2 + b^2 = c^2$ для сторон прямоугольного треугольника.

Тройки названы в честь Пифагора Самосского, хотя открыты задолго до него.

Пифагорова тройка является примитивной (несократимой), если любые два числа тройки взаимно простые. То есть она не может быть получена из другой пифагоровой тройки путем умножения на одно и то же целое число. В примитивной тройке числа a и b имеют разную четность, причем четное делится на 4, а число c – всегда нечетно.

Гипотенуза – дама капризная и вечно недовольная. Казалось бы, она самая большая, но отнюдь несамостоятельная и всегда находится в полной зависимости от каких-то там двух меньших собратьев-катетов.

В. Berggren впервые обнаружил [6], что множество всех примитивных пифагоровых троек естественным образом составляют структуру корневого троичного дерева.

В математике *дерево примитивных троек Пифагора* – это дерево данных, в котором каждый узел разветвляется на три последующих узла с бесконечным набором всех узлов, дающих все (и только) примитивные тройки Пифагора без их дублирования.

Двучленно-аддитивная рекурсия Фибоначчи.

В теории чисел известно, что из любого кортежа последовательных чисел Фибоначчи $F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}$ можно образовать пифагорову тройку (a, b, c) , $a^2 + b^2 = c^2$, где:

$a = F_{n-1}F_{n+2}$ – произведение крайних чисел Фибоначчи;

$b = 2 \cdot F_n F_{n+1}$ – удвоенное произведение средних чисел;

$c = F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2(n+1)+1}$ – сумма квадратов средних чисел.

По данным М.Ливиио [7], данное свойство обнаружил математик Чарльз Райн.

Аналогично для чисел Люка: $(a, b, c) = (L_n, L_{n+1}, \sqrt{5F_{2n+1}})$.

Соотношения красиво связывают между собой старинные числовые конструкции, но способны определять только отдельные тройки, причем многие из них не являются примитивными. В математическом плане они малопредставительны и больше служат в качестве учебно-демонстрационного материала.

Примечателен другой момент.

Пифагоровы тройки образуются не только по числам Фибоначчи и/или Люка.

В общем случае данная закономерность справедлива для двучленно-аддитивной рекурсии $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ с произвольными положительными начальными условиями: рациональными, иррациональными, трансцендентными.

То есть структурообразующей основой является рекурсия, и алгоритм одинаково хорошо работает для любых (!) "затравочных" величин,

Ограничимся прямоугольными треугольниками с целочисленными сторонами.

Тогда любая пара начальных условий в виде неотрицательных целых чисел, не равных одновременно нулю, формирует последовательность Фибоначчи f_n (не путать с числами Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...).

Образуемые пифагоровы тройки вида $(f_{n-1}f_{n+2}, f_n f_{n+1}, f_n^2 + f_{n+1}^2)$, которые не обязательно примитивные, обладают такими свойствами:

$$\frac{b}{a} = \frac{2f_n f_{n+1}}{f_{n-1} f_{n+2}} = 2 \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \Phi \cdot \phi = 2;$$

$$\frac{c}{b} = \frac{f_n^2 + f_{n+1}^2}{2f_n f_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f_n}{f_{n+1}} + \frac{f_{n+1}}{f_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot (\phi + \Phi) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

То есть, имеем бесконечный набор прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются целыми числами так, что отношение катетов сколь угодно близко к двум, а отношение гипотенузы к большему катету стремится к половине корня из пяти. Если к последнему добавить $1/2$, то получим константу золотого сечения $\frac{c}{b} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi = \phi^{-1}$.

С одной стороны, косвенно подтверждается дуализм теоремы Пифагора и золотого сечения, через предельный аттрактор отношения членов последовательности.

С другой стороны, видна четкая линия-водораздел между числами Фибоначчи и золотым сечением, представляющими две большие разницы, когда на первый план выдвигаются не сами числа, а процедура (!) их образования.

Иначе говоря, в приведенных формулах отражены не столько свойства чисел, сколько проявлена уникальная особенность двучленно-аддитивной рекурсии с любыми начальными условиями! А это, конечно, более существенно и принципиально.

То есть не числа сами по себе отражают-воспроизводят данную особенность, а алгоритм (!), по которому формируются эти числа: хоть целые, включая отрицательные, хоть комплексные или трансцендентные.

Рекурсия первична, числа вторичны!

Поэтому целочисленные пифагоровы тройки можно компоновать с использованием любых неотрицательных пар начальных условий для двучленно-аддитивной рекурсии.

Интерес, конечно, представляют генераторы всех примитивных пифагоровых троек.

Общие подходы для генерации примитивных пифагоровых троек.

Голландский математик F.J.M.Barning описал (1967) бесконечное плоское троичное дерево [8]. Семь лет спустя A.Hall самостоятельно обнаружил то же дерево [9]. Оба использовали метод унимодулярных матриц для преобразования одной тройки в другую.

Если любую из матриц, отличающуюся первыми двумя столбцами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

умножить справа на вектор-столбец любой пифагоровой тройки, то полученный вектор-столбец составит другую пифагорову тройку.

Для исходной примитивной тройки таковой будет и результирующая.

Матрицы A , B , C – унимодулярные, то есть имеют целочисленные элементы и определители, равные ± 1 . Обратные к ним матрицы также унимодулярные и состоят только из целочисленных элементов. Каждая примитивная тройка имеет трех потомков (детей).

По сути, данный подход стал развитием идеи В.Berggren [6] о получении примитивных пифагоровых троек с использованием трех линейных преобразований T_1 , T_2 , T_3 к исходной тройке (a, b, c) :

	Новые стороны		
	a'	b'	c'
T_1	$a - 2b + 2c$	$2a - b + 2c$	$2a - 2b + 3c$
T_2	$a + 2b + 2c$	$2a + b + 2c$	$2a + 2b + 3c$
T_3	$-a + 2b + 2c$	$-2a + b + 2c$	$-2a + 2b + 3c$

Все примитивные пифагоровы тройки являются потомками тройки египетского треугольника $(3, 4, 5)$.

Результат можно представить графически в виде бесконечного троичного дерева с корневой основой – тройкой $(3, 4, 5)$.

Применяя унимодулярные обратные матрицы A^{-1} , B^{-1} и C^{-1} к произвольной примитивной пифагоровой тройке, методом индукции можно показать, что дерево содержит все примитивные тройки, и при таком построении ни одна тройка не появляется дважды.

То есть от любой тройки существует в точности один путь обратно к корню $(3, 4, 5)$.

Другие подходы для формирования дерева основываются на альтернативных стандартных формулах параметризации и получения всех пифагоровых троек:

[10] $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, $m > 0$ и $n > 0$ – взаимно простые числа, имеющие различную четность, – формула Евклида [11];

[12] $(a, b, c) = \left(uv, \frac{u^2 - v^2}{2}, \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$, $u > 0$ и $v > 0$ – взаимно просты и нечетны.

Со временем произошло повторное "открытие" другого троичного дерева.

Так, в 2008 году обнаружено [13], что подобным образом можно получить новое дерево, применяя следующие матрицы (рис. 2):

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преобразования обоснованы обновленным прочтением теоремы Пифагора [14] с использованием "гармонического" (h) и "симфонического" (s) квадратов, вписанных в прямоугольный треугольник (рис. 3).

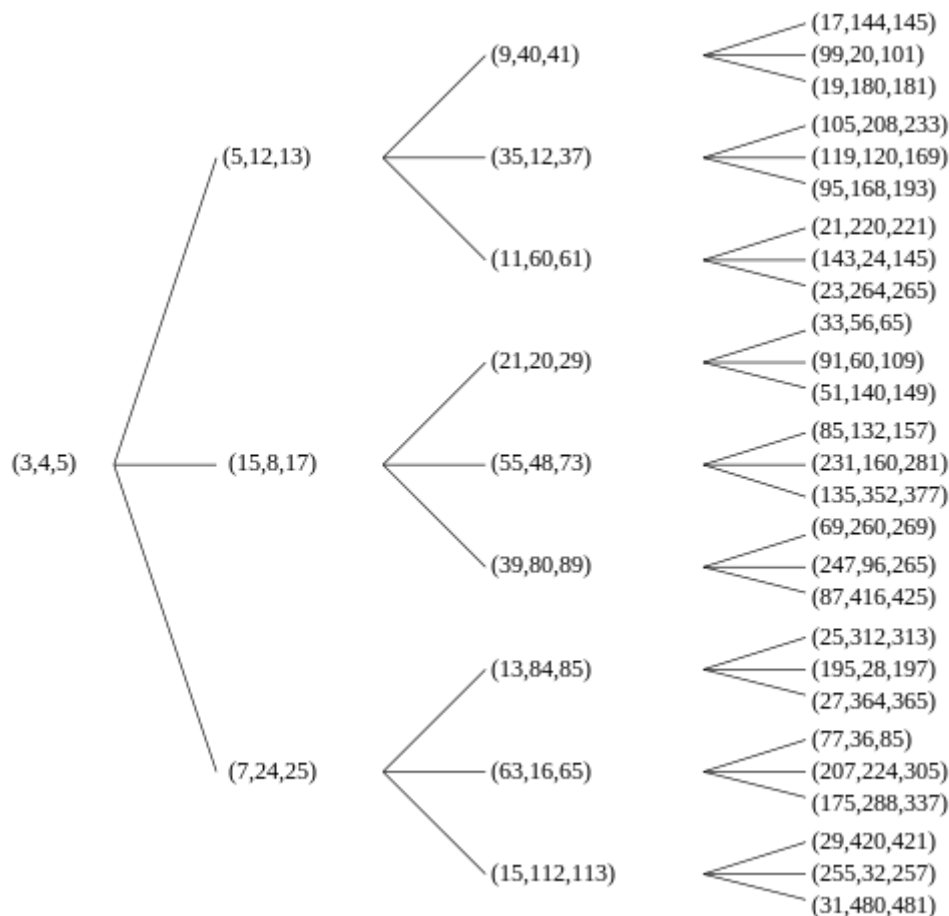


Рис. 2. Дерево Прайса примитивных пифагорейских троек

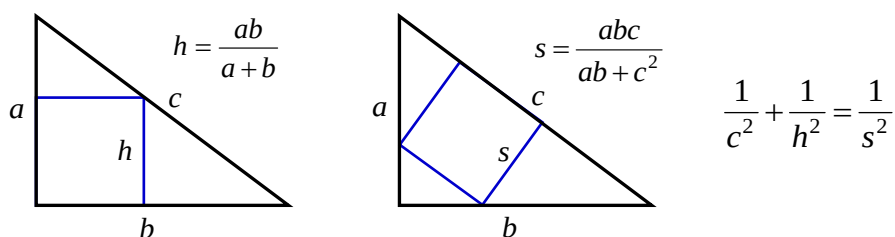


Рис. 3. Отношения между "гармоническим" (h) и "симфоническим" (s) квадратами, вписанными в прямоугольный треугольник

Неформальное выращивание дерева.

Образует квадратно-матричную коробку $\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}$, в которой верхняя строка – исходные (начальные) данные, а нижняя строка формируется вкруговую по двучленно-аддитивной рекурсии Фибоначчи [15]:

$$F_{t+1} = F_t + F_{t-1} \rightarrow \begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ m+2n & m+n \end{pmatrix}.$$

Далее составим тройной кортеж $(a \ b \ c) = (mk \ 2nl \ ml+nk)$.

Например, взяв за основу числа Фибоначчи, получаем пифагоровы тройки $(a^2 + b^2 = c^2)$:

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_4 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (1 \cdot 3 \ 2 \cdot 1 \cdot 2 \ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = (3 \ 4 \ 5);$$

$$\begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ F_5 & F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (1 \cdot 5 \ 2 \cdot 2 \cdot 3 \ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = (5 \ 12 \ 13);$$

$$\begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_6 & F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow (2 \cdot 8 \ 2 \cdot 3 \cdot 5 \ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8) = 2 \cdot (8 \ 15 \ 17)...$$

Сформируем три дочерних коробки (рис. 4), в которых первые строки соответственно равны: первой диагонали, нижней строке и второй диагонали исходной матрицы.

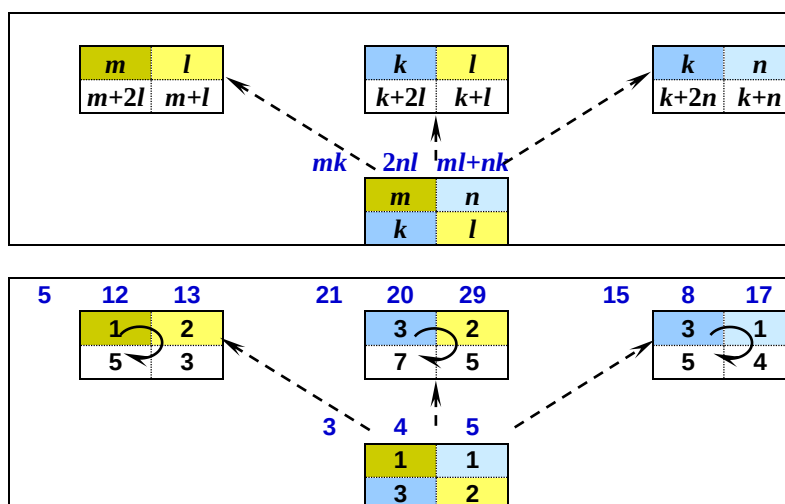


Рис. 4. Макет образования трех "коробок" для пифагоровых троек на основе двучленно-аддитивной рекурсии Фибоначчи

Как видим (рис. 4, внизу), новые матрицы содержат пифагоровы тройки:

$$5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 21^2 + 20^2 = 29^2, \quad 15^2 + 8^2 = 17^2.$$

Для каждой новой матрицы повторяем процедуру «из одной – три» согласно принятому макету, и у нас вырастает дерево пифагоровых троек (рис. 5).

В частности, на пути вверх по дереву мы наблюдаем семейства троек:

По левой ветке – <i>тройки Пифагора</i> , катет и гипотенуза отличаются на 1, $c - b = 1$					По центру – <i>тройки Ферма</i> , два катета отличаются на 1, $ b - a = 1$					По правой ветке – <i>тройки Платона</i> , катет и гипотенуза отличаются на 2, $c - a = 2$				
	3	4	5			3	4	5			3	4	5	
	5	12	13			21	20	29			15	8	17	
	7	24	25			119	120	169			35	12	37	
	9	40	41			697	696	985			63	16	65	

Это чудо-дерево порождает все примитивные (существенно различаемые) пифагоровы тройки. Причем каждая из них появляется лишь один раз. Изменение порядка следования катетов или масштабирование троек не принимаются во внимание.

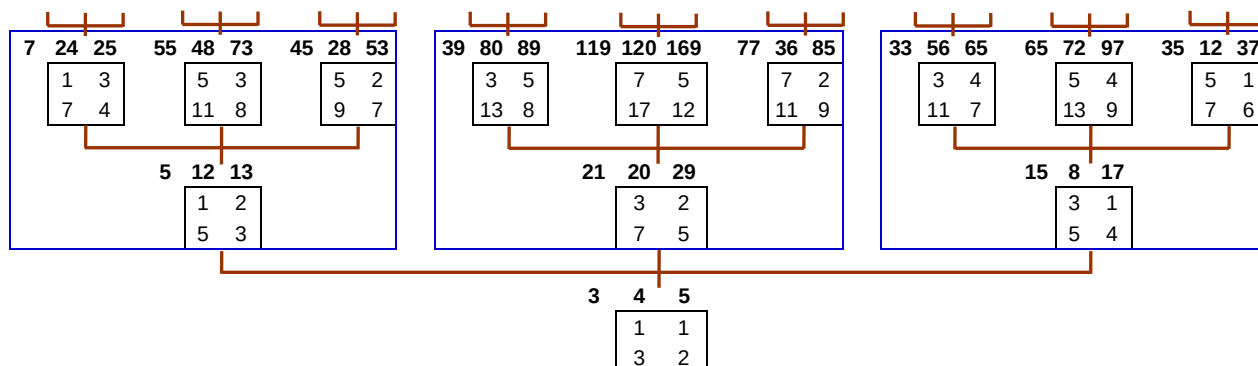


Рис. 5. Формирование древовидной структуры пифагоровых троек

Если первое их "затравочных" чисел – четное, то все пифагоровы тройки дерева – тоже четные. Например, числа Люка с начальными числами (2, 1).

Для любых двух целых чисел m и n можно также найти тройку Пифагора: $(m^2 + 2mn; 2n^2 + 2mn; m^2 + 2mn + 2n^2)$. Она не всегда будет примитивной, если мы не выберем два последовательных числа Фибоначчи. Более того, наибольший общий делитель (НОД) между m и n будет делителем НОД троек.

Ещё один превосходный факт. Превратим все столбцы коробок 2×2 в дроби. Получим дерево из пар положительных дробей (рис. 6). Все они меньше 1. Несократимые. Более того, дерево содержит каждую приведенную дробь в точности один раз!

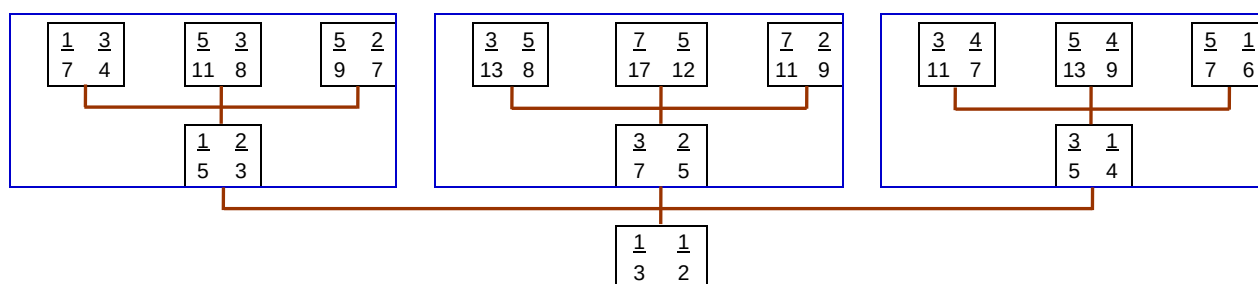


Рис. 6. Дерево из приведенных дробей

Например, дерево содержит дробь $1/2$, но в нём нет $2/4$ или $3/6$, ни какой-либо другой дроби, сводящейся к $1/2$.

Дерево включает лишь уменьшенные дроби меньше 1 и каждая из них только один раз.

С точки зрения чисел, дерево содержит каждое рациональное число в интервале $(0, 1)$ единожды. Дроби очень плотно упакованы в интервале, но на дереве они чудесным образом распределены и напоминают последовательность Фарея n -го порядка [16] (конечное подмножество рациональных чисел) – все положительные несократимые правильные дроби, знаменатель которых $\leq n$.

В русскоязычной среде такая последовательность часто называется рядом Фарея, что не правильно, поскольку члены не суммируются.

Интересная закономерность: две дроби в каждой коробке равны тангенсам половины каждого из двух острых углов треугольника.

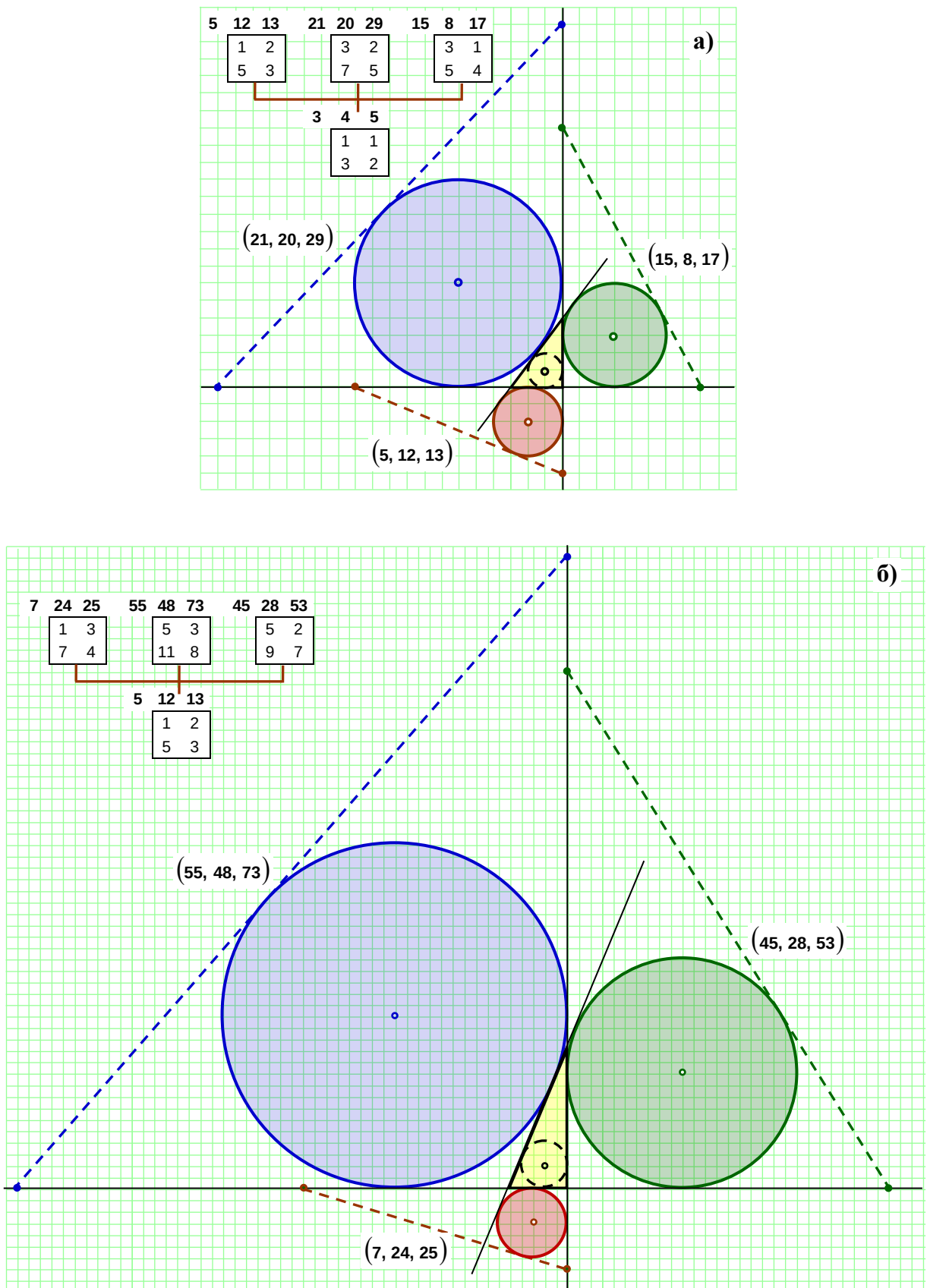


Рис. 7. Внеписанные окружности родителей а) (3, 4, 5) и б) (5, 12, 13) – они же вписанные окружности трех потомков прямоугольных треугольников

Неформальное выращивание дерева.

У каждой родительской коробки свои дети: младший, средний и старший.

Ещё один аспект касается геометрической связи «родители – дети» и визуального отображения механизма их роста.

Оказывается, дерево можно вырастить, исходя исключительно из треугольников и их свойств, без каких-либо чисел. – Как один из красивых и образцовых примеров геометрии.

В "саду Пифагора" существует еще одно генеалогическое древо на основе того, что каждая примитивная пифагорова тройка образует декартову четверку касательных окружностей (рис. 8) с целой кривизной [17, 18] и порождает целочисленную аполлонову упаковку, содержащую прямоугольник центров.

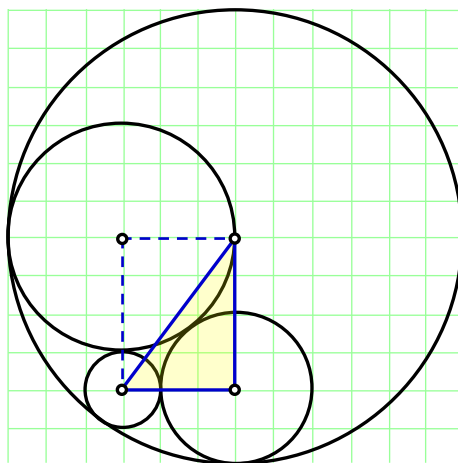


Рис. 8. Прямоугольник порождает четыре касающиеся окружности

Тройки Пифагора служат для создания большого количества неэквивалентных целых упаковок.

Известно, что внеписанная окружность треугольника касается одной из сторон и продолжений двух других его сторон.

Рассмотрим "Адама-прародителя"

1	1
3	2

 в формировании древовидной структуры пифагоровых троек (см. рис. 5).

Произведения разных пар чисел дают нам радиусы:

- верхняя строка $r = 1 \cdot 1 = 1$ – вписанная окружность исходного треугольника (3, 4, 5);
- нижняя строка $r_c = 3 \cdot 2 = 6$ – внеписанная окружность гипотенузы;
- диагонали $r_a = 1 \cdot 2 = 2$, $r_b = 1 \cdot 3 = 3$ – внеписанные окружности катетов.

На следующем уровне три внеписанные окружности становятся вписанными для трех потомков прямоугольных треугольников (рис. 7-а), соответственно:

$$(5, 12, 13), (15, 8, 17), (21, 20, 29).$$

Окружность Фейербаха или окружность девяти точек произвольного треугольника проходит через середины его сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром. Её диаметр равен радиусу описанной окружности.

Если вершину прямого угла родительского треугольника, например (5, 12, 13), условно принять за начало отсчета, то координаты центра окружности Фейербаха равны **F** (1,25; 3).

Соединим точку F с центрами окружностей трех потомков и построим до трех прямоугольных треугольников (α , β , γ) – рис. 9.

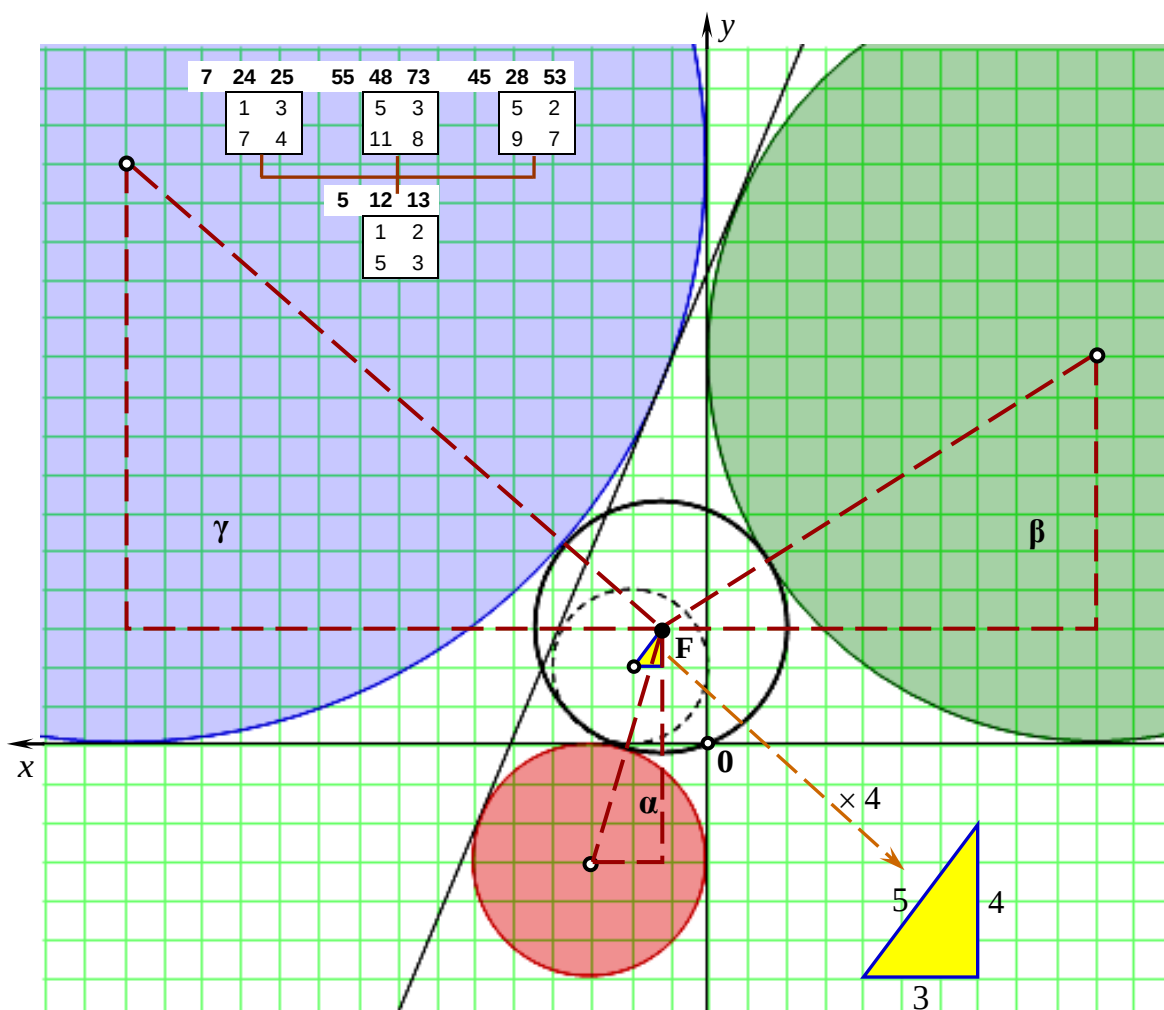


Рис. 9. Связь треугольников пифагоровых троек с окружностью Фейербаха на примере родительского треугольника (5, 12, 13)

Увеличив их катеты в четыре раза, получаем катеты дочерних пифагоровых троек:

$$\alpha: 4 \cdot (1,75; 6) = (7; 24);$$

$$\beta: 4 \cdot (11,25; 7) = (45; 28);$$

$$\gamma: 4 \cdot (13,75; 12) = (55; 48).$$

Кроме того, отчетливо просматривается исходный египетский треугольник (3, 4, 5).

Невероятная топология гармоничных отношений.

В результате вырастает элегантное дерево, содержащее треугольники примитивных троек и увязанные с ними касающиеся окружности с целыми радиусами.

С виду простая математика, но способная "подорвать" мозг.

Удивительно, но весь механизм роста, включая детские треугольники, можно описать исключительно с помощью представленных геометрических форм и картинок. – Без применения чисел, которые в данном случае применялись для проверки соотношений.

Настоящее геометрическое чудо.

Вместо заключения.

Главным итогом можно считать механизм формирования деревьев примитивных пифагоровых троек на основе двучленно-аддитивной рекурсии Фибоначчи и геометрических построений. – Как не вспомнить девиз платоновской академии: Не геометр да не войдет!

Числам отводится роль посредника и связующих звеньев.

Муза-гипотенуза не в накладе. Без наносной гилетической числонавтики.

Абстрактное умозрительное понятие числа, пребывающее исключительно в нашем сознании, остается удобным инструментом для описания разных систем фрактальной или гранулированной структуры.

Весьма эффективным становится установление связей-параллелей между разными математическими объектами. Полезным остается общий метод аналогий – один из универсальных и одновременно простых эвристических приемов поиска новых идей и оригинальных решений творческих задач. Служит эффективным способом активизации творческого мышления и воображения, преодоления мыслительных барьеров и стереотипов.

В качестве примера приведем простой алгоритм образования магического квадрата с нечетным n количеством строк и столбцов (рис. 10), как аналогию к образованию четверки касательных окружностей при формировании примитивных пифагоровых троек.

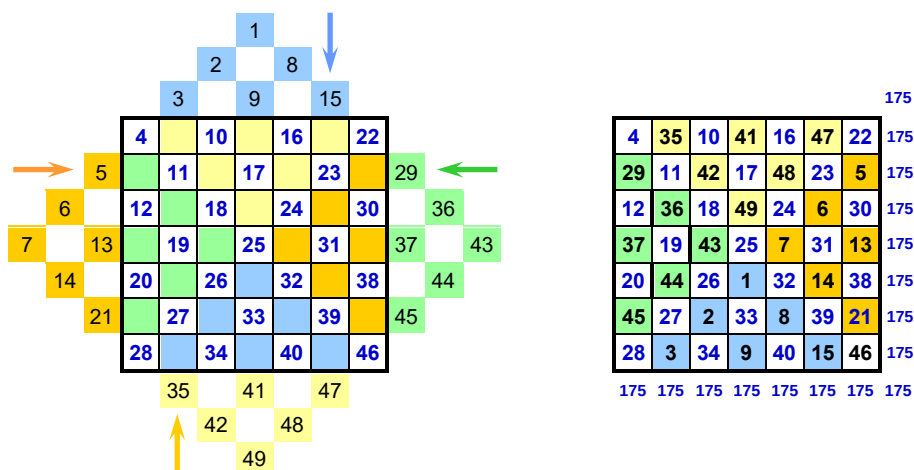


Рис. 10. Магический квадрат 7×7

Исходные числа от 1 до n^2 распределяется последовательно в разреженном формате.

Центральная часть белых клеток $n \times n$ составляет базис. Остальные свободные ячейки заполняются обычным переносом (извне внутрь) в направлении четырех стрелок с соответствующим цветом. – Всё!

Сродни геометрическому построению дерева примитивных пифагорейских троек с передвижением треугольников и окружностей. Причем для любого нечетного значения n .

Такой себе древовидно-бесконечный магический квадрат, способный покрыть всю мыслимую Вселенную. Во всяком случае, в натуральных числах недостатка нет.

Sine qua non...

Литература:

1. Василенко С.Л. «Два сокровища геометрии» как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110> / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html>.

2. Василенко С.Л. Дуализм «двух сокровищ геометрии»: теоремы Пифагора и золотого сечения / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23021, 03.02.2017. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163206.htm>.
3. Василенко С.Л. Бинарный характер золотого сечения и последовательностей Фибоначчи / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24230, 31.01.2018. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163604.htm>.
4. Василенко С.Л. Бинарная связь теоремы Пифагора и последовательностей Фибоначчи / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24326, 06.03.2018. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163643.htm>.
5. Белянин В.С., Романова Е.Н. Золотая пропорция. Новый взгляд // Наука и жизнь. – 2003. – № 6. – <https://www.nkj.ru/archive/articles/3070/>.
6. Berggren B. Pytagoreiska trianglar (Swedish) / Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi. – 1934. – Т. 17. – С. 129-139.
7. Марио Ливио. ϕ – число Бога. Золотое сечение – формула мироздания: Пер. с англ. – М.: АСТ, 2016. – 432 с.
8. Barning F.J.M. On Pythagorean and quasi-Pythagorean triangles and a generation process with the help of unimodular matrices / Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk. ZW-001 (1963).
9. Hall A. Genealogy of Pythagorean Triads / Math. Gazette, 1970, 54(390), 377-379.
10. Saunders R.A., Randall T. The family tree of the Pythagorean triplets revisited // Math. Gazette, 1994, 78(482), 190-193.
11. Joyce D.E. Euclid's Elements. – Clark University, June 1997. – Book X, Proposition XXIX. – <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/toc.html>.
12. Mitchell D.W. An alternative characterization of all primitive Pythagorean triples // Math. Gazette, 2001, 85(503), 273-275.
13. H.Lee Price. The Pythagorean Tree: A New Species / Cornell University, Mathematics, 2008. – <https://arxiv.org/pdf/0809.4324>.
14. H.Lee Price, Frank R.Bernhart. Pythagorean Triples and a New Pythagorean Theorem / Cornell University, Mathematics, 2007. – <https://arxiv.org/pdf/math/0701554>.
15. Fibonacci = Pythagoras: Help save a beautiful discovery from oblivion / Mathologer, 03.12.2022. – <https://www.youtube.com/watch?v=94mV7Fmbx88>.
16. Wikipedia contributors. Farey sequence / The Free Encyclopedia. Wikipedia – https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence.
17. Frank R.Bernhart, H.Lee Price. Heron's Formula, Descartes Circles, and Pythagorean Triangles / Mathematics, 2007.
18. Frank R.Bernhart, H.Lee Price. Pythagoras' garden, revisited / Australian Senior Math. J., 2012, 26(1), 29-40.
19. Василенко С.Л. Гилетическая численавтика или мифология о числах с того света / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28963, 08.05.2024. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165589.htm>.

© ВаСиЛенко, 2024 
Украина, Харьков

